Exame nacional de Matemática A (2008, Época especial)

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Para formar um número ímpar, de quatro algarismos diferentes, o algarismos das unidades só pode ser 1, 3 ou 5, ou seja temos 3 hipóteses.
   Por cada uma destas hipóteses existem ${}^3A_3 = P_3 = 3!$ hipóteses de colocar os restantes 3 algarismos nas restantes 3 posições, ou seja, a quantidade de números que existem, nas condições do enunciado, é:

   $$3 \times 3! = 18$$

   Resposta: **Opção C**

2. Como o 14º elemento de uma linha do triângulo de Pascal é igual ao 15º elemento dessa mesma linha, os 14 primeiros elementos são iguais (por ordem inversa) aos elementos do segundo grupo de 14 elementos, ou seja a linha tem 28 elementos.

   Resposta: **Opção C**

3. Como são selecionados 6 números de entre 49, sendo a ordem de seleção irrelevante, existem ${}^{49}C_6$ chaves possíveis.
   Para que a chave inclua os números 1, 2 e 3, deve incluir outros 3 números selecionados de entre um conjunto de $49 - 3 = 46$ possibilidades, visto que não podem existir repetições excluem-se os números 1, 2 e 3 das possibilidades, ou seja existem ${}^{46}C_3$ chaves com os números 1, 2 e 3.
   Assim, a probabilidade de que uma chave do totoloto inclua os números 1, 2 e 3 é $\frac{{}^{46}C_3}{{}^{49}C_6}$

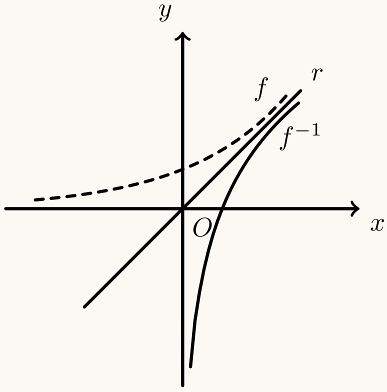
   Resposta: **Opção B**

4. Usando as propriedades dos logaritmos temos que:

   $$x. \ln\left(e^e\right) = x.e \ln e = x.e \times 1 = ex$$

   Resposta: **Opção A**

5. Como os gráficos das funções f e f^{-1} são simétricos relativamente à reta de equação $y = x$, então a única figura, de entre as opções apresentadas, que pode representar parte do gráfico da função f^{-1}, é a figura da opção (D).



Resposta: **Opção D**

6. Sabemos que, no 4º quadrante - ou seja no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ - o cosseno de um ângulo é positivo e que cresce de 0 para 1, ou seja $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ e $\cos(0) = 1$

No primeiro quadrante - em particular no intervalo $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ - o cosseno também é positivo, e decrescente, pelo que não atinge valores superiores a 1.

Logo, como a função f tem domínio $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3}\right]$, contradomínio de f é $[0,1]$

Resposta: **Opção B**

7. Analisando cada uma das opções apresentadas, temos que:

- A condição $|z+4| = 5$ pode ser escrita como $|z-(-4)| = 5$ e define os pontos do plano complexo, cuja distância à representação geométrica do número complexo $w = -4$ é igual a 5. Ou seja, a circunferência de centro no ponto de coordenadas $(-4,0)$ e raio 5.
- A condição $|z| = |z+2i|$ pode ser escrita como $|z-0| = |z-(-2i)|$ e define os pontos do plano complexo, que são equidistantes das representações geométricas do números complexos $w_1 = 0$ e $w_2 = -2i$. Ou seja, a mediatriz do reta cujos extremos são os pontos de coordenadas $(0,0)$ e $(0,-2)$.
- A condição $0 \leq \arg(z) \leq \pi$ define todos os números complexos cuja representação geométrica define com a origem e a parte positiva do eixo real um ângulo compreendido entre 0 e π radianos. Ou seja, a totalidade dos 1º e 2º quadrantes.
- A condição $\text{Re}\,(z) + \text{Im}\,(z) = 2$ define todos os números complexos da forma $w = a + (2-a)i$, com $a \in \mathbb{R}$. Ou seja a reta paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares que contém o ponto de coordenadas $(0,-2)$.

Resposta: **Opção A**

8. Seja $w = 2\,\text{cis}\left(-\frac{3\pi}{5}\right)$. Como $-\pi < \arg(w) < -\frac{\pi}{2}$, a imagem geométrica de w pertence ao 3º quadrante, logo o único vértice do polígono que pode ser a imagem geométrica do número complexo w, é o vértice H

Resposta: **Opção C**

GRUPO II

1.

1.1. Como $\operatorname{cis}\frac{\pi}{2} = i$, temos que:

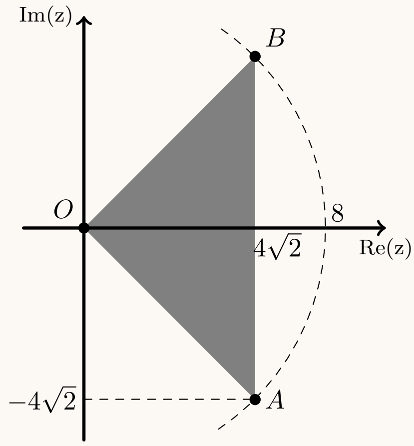
$z_1 = (1-i).(1+i) = 1^2 - i^2 = 1+1 = 2$

Na f.t.: $z_1 = 2\operatorname{cis} 0$

Fazendo a divisão na f.t.:

$$w = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2\operatorname{cis} 0}{8\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{2}{8}\operatorname{cis}\left(0 - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{4}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$$

1.2. Representando os pontos A e B, podemos desenhar o triângulo $[ABO]$ (ver figura ao lado).



Como $z_2 = 8\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, podemos escrever este número na f.a.:

$$z_2 = 8\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= 8\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) = 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i$$

E assim, considerando como base do triângulo o lado $[AB]$, temos que a medida da base é $2|\operatorname{Im}(z)| = 2 \times 4\sqrt{2}$ e a medida da altura é $\operatorname{Re}(z) = 4\sqrt{2}$.

Logo a área do triângulo $[ABC]$ é:

$$A_{[ABO]} = \frac{2 \times 4\sqrt{2} \times 4\sqrt{2}}{2} = 4^2 \times \left(\sqrt{2}\right)^2 = 16 \times 2 = 32$$

2.

2.1. O número de hipóteses em que nas extremidades ficam sentados rapazes é dado por ${}^3A_2$, que corresponde a selecionar 2 dos 3 rapazes, considerando a ordem relevante para distinguir a extremidade da esquerda e da direita.
Depois, por cada uma das hipóteses anteriores, existem 4 pessoas para ocupar as 4 posições centrais, o que corresponde a ${}^4A_4 = P_4 = 4!$ hipóteses para ocupar os lugares centrais.
Assim, o número de maneiras diferentes que os seis amigos se podem sentar, ficando um rapaz em cada uma das extremidades, é

$${}^3A_2 \times 4! = 144$$

2.2. Determinando a probabilidade com recurso à Regra de LaPlace, calculamos o quociente do número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis, sendo os casos possíveis equiprováveis.
O número de casos possíveis pode ser calculado por ${}^3A_3 = P_3 = 3!$ o que significa que ordenamos os pares. Por exemplo fixando a ordem das raparigas, sendo a Ana a primeira, a Maria a segunda e a Francisca a terceira, se ordenarmos os rapazes, cada posição corresponde a dançar com a rapariga dessa posição - assim temos 3 elementos (rapazes) para 3 posições (raparigas), ou seja 3! emparelhamentos diferentes.
Considerando 3! casos possíveis, existem 2 casos favoráveis, que correspondem à situação da Ana dançar com o João, e os outros dois pares trocarem entre si (o Rui dançar com a Maria, ou o Rui dançar com a Francisca).
Logo a probabilidade da Ana dançar com o João é igual a $\dfrac{2}{3!}$

3. Temos que:

$$\begin{aligned}
1 - P\left(\overline{A \cup B}\right) + P(A|B) \times P(B) &= P(A \cup B) + P(A|B) \times P(B) && (1)\\
&= P(A \cup B) + \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \times P(B) && (2)\\
&= P(A \cup B) + P(A \cap B) &&\\
&= P(A) + P(B) && (3)
\end{aligned}$$

(1) Teorema: $P(X) = 1 - P\left(\overline{X}\right)$
(2) Definição: $P(X|Y) = \dfrac{P(X \cap Y)}{P(Y)}$
(3) Teorema: $P(X \cup Y) + P(X \cap Y) = P(X) + P(Y)$

Logo, $1 - P\left(\overline{A \cup B}\right) + P(A|B) \times P(B) = P(A) + P(B)$ *q.e.d.*

4.

4.1. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$f'(x) = \left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{(e^x)'x - e^x(x)'}{x^2} = \frac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} = \frac{xe^x - e^x}{x^2}$$

Como o declive (m) da reta tangente ao gráfico de f em $x = 2$ é $f'(2)$, temos que:

$$m = f'(2) = \frac{2e^2 - e^2}{2^2} = \frac{e^2}{4}$$

Determinando a ordenada do ponto do gráfico da função que tem abcissa zero, temos:

$$f(2) = \frac{e^2}{2}$$

Como o ponto de abcissa 2, também pertence à reta tangente, substituímos as coordenadas deste ponto e o declive da reta, em $y = mx + b$, para calcular o valor de b:

$$\frac{e^2}{2} = \frac{e^2}{4} \times 2 + b \;\Leftrightarrow\; \frac{e^2}{2} = \frac{e^2}{2} + b \;\Leftrightarrow\; \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} = b \;\Leftrightarrow\; 0 = b$$

Desta forma, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0, é:

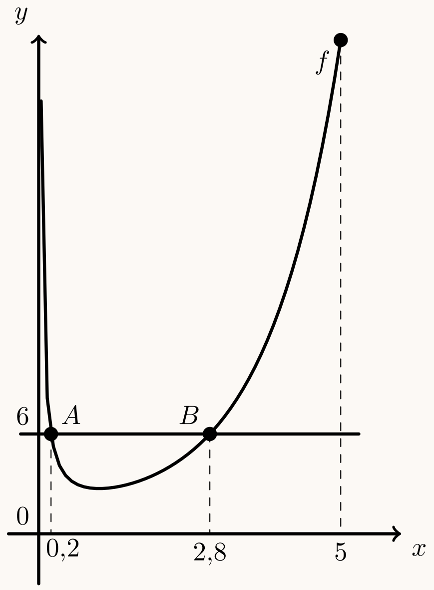
$$y = \frac{e^2}{4} \times x$$

4.2. Traçando na calculadora gráfica o gráfico da função f, no intervalo $]0,5]$ e a reta de equação $y = 6$ podemos visualizar o gráfico reproduzido na figura ao lado.

Assim, as abcissas dos pontos A e B, também assinalados na figura ao lado, podem ser determinadas com aproximação às décimas, usando a função da calculadora que permite determinar valores aproximados para as coordenadas de pontos de interseção de dois gráficos.

As coordenadas são $A(0{,}2;6)$ e $B(2{,}8;6)$, pelo que podemos calcular a distância, com aproximação às décimas, como o valor absoluto da diferença das abcissas:

$$\overline{AB} = |x_B - x_A| \approx |2{,}8 - 0{,}2| \approx 2{,}6$$



5. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$f'(x) = \left(\ln(x^2+1)\right)' = \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} = \frac{2x+0}{x^2+1} = \frac{2x}{x^2+1}$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x}{x^2+1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = 0 \wedge \underbrace{x^2+1 \neq 0}_{\text{PV, } x^2+1 \geq 1} \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

Analisando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia de f, temos:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

Assim, podemos concluir que a função f:

- é decrescente no intervalo $]-\infty,0]$;
- é crescente no intervalo $[0,+\infty[$;
- tem um único extremo - um mínimo (cujo minimizante é 0).

Calculando o valor do mínimo, vem:

$$f(0) = \ln(0^2+1) = \ln(0+1) = \ln 1 = 0$$

6. Como $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b$, então $\operatorname{sen}(2a) = \operatorname{sen}(a+a) = 2 \operatorname{sen} a \cos a$, e assim temos que

$$f(x) = 2\operatorname{sen}(x).\cos(x) + 2 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \operatorname{sen}(2x) + 2$$

A ordenada do ponto de interseção da reta $y = 1$ com o gráfico de f é 1 e a abcissa é a solução da equação $f(x) = 1$ que pertence ao intervalo $[0,\pi]$. Assim, resolvendo a equação temos:

$$f(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{sen}(2x) + 2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{sen}(2x) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{sen}(2x) = \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \ \vee \ 2x = \pi - \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \ k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{3\pi}{4} + \frac{2k\pi}{2} \ \vee \ 2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \ \vee \ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \ k \in \mathbb{Z}$$

Assim atribuindo valores a k ($k = 0$ para o primeiro caso ou $k = 1$ no segundo caso) obtemos a única solução da equação que pertence ao intervalo $[0,\pi]$, ou seja, $x = \frac{3\pi}{4}$

Logo as coordenadas do ponto de interseção são: $\left(\frac{3\pi}{4},1\right)$

7.

7.1. Como

$$T(0) = 25 + 48e^{-0,05\times 0} = 25 + 48e^0 = 25 + 48 \times 1 = 73$$

Então sabemos que zero minutos após o início do arrefecimento, ou seja, quando se interrompeu o processo de aquecimento, a temperatura da água era de 73 graus Celcius.

Como se verifica que:

$$\lim_{x\to+\infty} T(t) = \lim_{x\to+\infty} \left(25 + 48e^{-0,05\times t}\right) = \lim_{x\to+\infty} (25) + \lim_{x\to+\infty} \left(48e^{-0,05\times t}\right) =$$

$$= 25 + 48 \lim_{x\to+\infty} e^{-0,05\times t} = 25 + 48 \times e^{-0,05\times +\infty} = 25 + 48 \times e^{-\infty} = 25 + 48 \times 0^+ = 25$$

Então sabemos que um aumento arbitrariamente grande do tempo corresponde a uma temperatura de 25 graus Celsius, ou seja, com o passar do tempo a água vai arrefecer até aos 25 graus.

7.2. Equacionado o problema e resolvendo a equação, vem:

$$T(t) = 36 \ \Leftrightarrow \ 25 + 48e^{-0,05t} = 36 \ \Leftrightarrow \ 48e^{-0,05t} = 36 - 25 \ \Leftrightarrow \ e^{-0,05t} = \frac{11}{48} \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ -0,05t = \ln\frac{11}{48} \ \Leftrightarrow \ t = \frac{\ln\frac{11}{48}}{-0,05} \ \Rightarrow \ t \approx 29,4661$$

Assim temos que o tempo corresponde a 29,4661 minutos, aproximadamente. E como cada minuto tem 60 segundos, fazendo a conversão de 0,4661 minutos para segundos, temos que:

$$0,4661 \times 60 = 27,9660 \approx 28 \text{ s}$$

Pelo que se concluí que demorou 29 minutos e 28 segundos, após o início do arrefecimento, para que a temperatura da água atingisse os 36° Celsius.